Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet

16.01.2015.

III kolokvijum iz Numeričkih metoda

1. a) Konstrusati Lagrangeov interpolacioni polinom u 30 ekvidistantnih interpolacionih čvorova na intervalu $[1, 10]$, za funkciju $f(x) = (x-1)^2(x-5)^2(x-10)^2 + 1$. Prikazati grafički zavisnost broja značajnih cifara kojom interpolacioni polinom aproksimira funkciju f na intervalu $[1, 10]$.

   b) Koristeći grafik Lebesgueove funkcije, za dati raspored interpolacionih čvorova, dati teorijsku ocenu broja značajnih cifara na intervalu $[1, 10]$. Uporediti teorijske rezultate sa dobijenim eskperimentalnim vrednostima. Objasniti poklapanje koristeći izraz za ocenu greške interpolacije.

   c) Koristeći grafik Lebesguove funkcije oceniti minimalni broj značajnih cifara prilikom interpolacije funkcije $f(x) = (x-1)^2(x-5)^2(x-10)^2 + 1$, na intervalu $[1, 10]$, ako ulazni podaci imaju barem 7 značajnih cifara.

2. Pretpostavimo da imate na raspolaganju merni uredjaj koji ima gornju granicu relativne greške 10^{-m}, $m \in \mathbb{N}$, i da odmeravate konstantnu funkciju $f(x) = .1$ na intervalu $[0, 5]$ sa korakom odmeravanja $h = .001$.

   a) Za $m = 5$, odrediti Newtonov interpolacioni polinom najvišeg stepena n konstruisanog u interpolacionim čvorovima $x_k = 0 + kh$, $k = 0, \ldots, n$, tako da je broj značajnih cifara kojim Newtonov interpolacioni polinom aproksimira funkciju f u tački x_n, bar dva.

   b) Nacrtati zavisnost najvišeg stepena Newtonovog interpolacionog polinoma n, za postizanje bar dve značajne cifre u tački x_n, u funkciji broja značajnih cifara ulaznih podataka m. Objasniti zašto je zavinost linearna.

3. a) Nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji stepena tačnosti $n = 2k$, $k = 1, \ldots, 30$, prilikom odredjivanja izvoda funkcije $f(x) = \log x$, u tački $x = 5$, metodama jednostranog i dvostranog diferenciranja.

   b) Uporediti dobijene rezultate sa dobijenim teorijskim ocenama. Objasniti razlog velikog odstupanja. Objasniti zašto formula za dvostrano diferenciranje ima broj značajnih cifara koji, sem za mala stepene tačnosti, ne zavisi od stepena tačnosti formule n.

4. Koristeći uopštenu trapeznu formulu za izračunavanje integrala

$$\int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{\sin(1000\pi \log(2+x)/\log(3))}{2+x}\right) dx = 2,$$

nacrtati zavinost broja značajnih cifara u funkciji logaritma broja podintervala $N = 2^k$, $k = 1, \ldots, 20$. Uporediti dobijene rezultate sa teorijskom ocenom. Pokazati da je priraštaj značajnih cifara prilikom povećanja broja podintervala za dva puta isti i na osnovu dobijenih rezultata eksperimentom i teorijski. Objasniti zašto teorijska ocena daje manji broj značajnih cifara od broja značajnih cifara dobijenih eksperimentom za isti broj podintervala.

5. a) Naći egzaktno rešenje Chauchyevog problema

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 1.$$

b) Napisati funkcije u `Matlabu` koje aproksimiraju rešenje Cauchyevog problema koristeći Eulerov metod

$$y_{n+1} = y_n + hf_k, \quad y_0 = y(0),$$

i Adams-Bashforthov metod

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n), \quad y_0 = y(0), \quad y_1 \approx 1 + h^2 + \frac{h^4}{2}, \quad y_2 \approx 1 + 4h^2 + 8h^4.$$

c) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije rešenja $y(1)$ u funkciji logaritma koraka $h = 2^{-k}$, $k = 1, \ldots, 15$. Oceniti na osnovu grafika red Adams-Bashforthovog metoda.

d) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja Cauchyevog problema, prilikom izračunavanja Adams-Bashforthovim metodom, na intervalu $[0, 1]$ za $h = 2^{-10}$. Objasniti oblik krive.

prof. dr Aleksandar Cvetković